

DS de mathématiques n°2

Sommes, trigonométrie, nombres complexes,

fonctions réelles – Corrigé

Noté sur 109pts ± 5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 20/50

Exercice 1 — Calcul de sommes binomiales

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut donner une expression simple de

$$S_n = \sum_{k=1}^n k \binom{2n}{2k} \quad \text{et} \quad S'_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$$

On pose

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=1}^n \binom{2n-1}{2k-1}$$

1) Calculer U_n et V_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$. Que peut-on conjecturer ?

$$U_1 = \binom{1}{0} = \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} U_2 &= \sum_{k=0}^1 \binom{3}{2k} \\ &= \binom{3}{0} + \binom{3}{2} \\ &= 1 + 3 \\ &= \boxed{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_3 &= \sum_{k=0}^2 \binom{5}{2k} \\ &= \binom{5}{0} + \binom{5}{2} + \binom{5}{4} \\ &= 1 + 10 + 5 \\ &= \boxed{16} \end{aligned}$$

$$V_1 = \binom{1}{1} = \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \sum_{k=1}^2 \binom{3}{2k-1} \\ &= \binom{3}{1} + \binom{3}{3} \\ &= 3 + 1 = \boxed{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= \sum_{k=1}^3 \binom{5}{2k-1} \\ &= \binom{5}{1} + \binom{5}{3} + \binom{5}{5} \\ &= 5 + 10 + 1 \\ &= \boxed{16} \end{aligned}$$

On peut conjecturer que $U_n = V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) a) Rappeler (sans la démontrer) la formule de symétrisation du coefficient binomial.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

b) En déduire, grâce au changement d'indice $j = n - k$ dans U_n , que $U_n = V_n$.

On a

$$\begin{aligned}
 U_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} \\
 &= \sum_{j=1}^n \binom{2n-1}{2(n-j)} \quad \text{avec } \begin{cases} j = n-k \\ k = n-j \end{cases} \\
 &= \sum_{j=1}^n \binom{2n-1}{2n-2j} \\
 &= \sum_{j=1}^n \binom{2n-1}{2n-1-(2j-1)} \\
 &= \sum_{j=1}^n \binom{2n-1}{2j-1} \\
 &= \boxed{V_n}
 \end{aligned}$$

- 3) a) Écrire U_n et V_n sous forme développée, en faisant apparaître leurs trois premiers et leurs deux derniers termes.

$$\begin{aligned}
 V_n &= \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{3} + \binom{2n-1}{5} + \dots \\
 &\quad + \binom{2n-1}{2n-3} + \binom{2n-1}{2n-1} \\
 U_n &= \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{2} + \binom{2n-1}{4} + \dots \\
 &\quad + \binom{2n-1}{2n-4} + \binom{2n-1}{2n-2}
 \end{aligned}$$

- b) En déduire que $U_n + V_n = 2^{2n-1}$.

En sommant les deux identités précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}
 U_n + V_n &= \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{2} + \dots \\
 &\quad + \binom{2n-1}{2n-2} + \binom{2n-1}{2n-1} \\
 &= \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{j} \\
 &= \sum_{j=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{j} 1^j 1^{2n-1-j} \\
 &= (1+1)^{2n-1} \\
 &= \boxed{2^{2n-1}}
 \end{aligned}$$

- 4) En déduire U_n et V_n en fonction de n .

Par la question b) , on a $V_n = U_n$ et donc, par la question précédente,

$$\begin{aligned}
 U_n + V_n &= 2^{2n-1} \\
 \implies 2U_n &= 2^{2n-1} \\
 \implies U_n &= 2^{2n-2}
 \end{aligned}$$

Ainsi, $U_n = V_n = 2^{2n-2} = \boxed{4^{n-1}}$.

- 5) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{1, \dots, m\}$. Montrer que $j \binom{m}{j} = \alpha_m \binom{m-1}{j-1}$, avec α_m un réel qui dépend uniquement de m que l'on précisera.

$$\begin{aligned}
 j \binom{m}{j} &= j \times \frac{m!}{j!(m-j)!} \\
 &= \frac{m!}{(j-1)!(m-j)!} \\
 &= m \times \frac{(m-1)!}{(j-1)! \times [(m-1-(j-1))]} \\
 &= m \times \binom{m-1}{j-1}
 \end{aligned}$$

d'où le résultat avec $\alpha_m = \boxed{m}$.

- 6) En déduire que $S_n = nV_n$, puis la valeur de S_n . On pourra exprimer le résultat en fonction d'un réel α_m avec une valeur de m bien choisie

si l'expression de α_m n'a pas été trouvée en question précédente.

On a, par la question précédente :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2k \binom{2n}{2k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2n \binom{2n-1}{2k-1} \\ &= n \sum_{k=1}^n \binom{2n-1}{2k-1} \\ &= nV_n \\ &= \boxed{n4^{n-1}} \end{aligned}$$

- 7) a) Rappeler (sans la démontrer) la formule du triangle de Pascal.
Pour tous $j \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\binom{m}{j} + \binom{m}{j+1} = \binom{m+1}{j+1}$$

- b) En retirant un terme de la somme de U_n et un terme de la somme de V_n , en déduire que $S'_n = U_n + V_n$, puis la valeur de S'_n .

$$\begin{aligned} U_n + V_n &= \sum_{k=1}^n \binom{2n-1}{2k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} \\ &= \binom{2n-1}{2n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-1}{2k} + \binom{2n-1}{0} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{2n-1}{2k-1} + \binom{2n-1}{2k} \right] + 1 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} + 1 \\ &= \binom{2n}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} + \binom{2n}{0} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \\ &= S'_n \end{aligned}$$

Ainsi, $S'_n = U_n + V_n = \boxed{2^{2n-1}}$ par la question b) .

Exercice 2 — Méthode de Cardan

On considère deux complexes non nuls p et q , ainsi que l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E) : \quad z^3 + pz + q = 0$$

On considère aussi l'équation (P) suivante d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$:

$$(P) : \quad Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27} = 0$$

Soit U et V les racines complexes de (P) . Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^3 = U$.

- 1) Justifier que $UV = -\frac{p^3}{27}$ et $U + V = -q$.

Comme U et V sont les racines de $Z^2 + qZ - \frac{p^3}{27}$, on a

$$\boxed{UV = -\frac{p^3}{27}} \quad \text{et} \quad \boxed{U + V = -q}$$

- 2) Dans cette question uniquement, on suppose $U = 2 + 2i$. Déterminer toutes les valeurs possibles de u .

On a :

$$\begin{aligned} U &= 2 + 2i \\ &= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Ainsi, les racines cubiques de U sont

$$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}e^{\frac{2i\pi}{3}}, \quad \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}}$$

- 3) Montrer que $u \neq 0$. Dans la suite du problème, on pose $v = \frac{-p}{3u}$.

Supposons par l'absurde que $u = 0$. Alors $U = u^3 = 0$. Ainsi,

$$UV = -\frac{p^3}{27} = 0$$

donc $p = 0$, ce qui est une contradiction. Finalement, $\boxed{u \neq 0}$.

4) Calculer u^3v^3 . En déduire que $v^3 = V$.

On a

$$u^3v^3 = u^3 \left(-\frac{p}{3u}\right)^3 = -\frac{p^3}{27} = UV = u^3V$$

Comme $U = u^3 \neq 0$, on peut diviser par u^3 : on obtient $\boxed{v^3 = V}$.

5) En déduire la valeur de $u^3 + v^3$.

Par la question 1 et la question 4, on a $u^3 + v^3 = U + V = \boxed{-q}$

6) Montrer que $u + v$ est solution de (E).

On substitue z par $u + v$ dans (E) :

$$\begin{aligned} & (u + v)^3 + p(u + v) + q \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q \\ &= U + V + 3uv(u + v) + p(u + v) + q \\ &= -q + (3uv + p)(u + v) + q \\ &= \left(3u \times \left(-\frac{p}{3u}\right) + p\right)(u + v) \\ &= 0 \times (u + v) = 0 \end{aligned}$$

Finalement, $u + v$ est solution de (E).

7) On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que $ju + j^2v$ et $j^2u + jv$ sont aussi solutions de (E).

Montrons que $ju + j^2v$ est une solution de (E). Comme $j^3 = e^{2i\pi} = 1$, on a

$$\begin{aligned} & (ju + j^2v)^3 + p(ju + j^2v) + q \\ &= (ju)^3 + 3(ju)^2j^2v + 3ju(j^2v)^2 + (j^2v)^3 + p(ju + j^2v) + q \\ &= j^3u^3 + 3j^4u^2v + 3j^5uv^2 + j^6v^3 + p(ju + j^2v) + q \\ &= u^3 + 3ju^2v + 3j^2uv^2 + v^3 + p(ju + j^2v) + q \\ &= U + V + 3uv(ju + j^2v) + p(ju + j^2v) + q \\ &= -q + (3uv + p)(ju + j^2v) + q \\ &= 0 \times (ju + j^2v) = 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat. Montrons maintenant que $j^2u + jv$ est une solution de (E).

$$\begin{aligned} & (j^2u + jv)^3 + p(j^2u + jv) + q \\ &= (j^2u)^3 + 3(j^2u)^2jv + 3j^2u(jv)^2 + (jv)^3 + p(j^2u + jv) + q \\ &= j^6u^3 + 3j^5u^2v + 3j^4uv^2 + j^3v^3 + p(j^2u + jv) + q \\ &= u^3 + 3j^2u^2v + 3juv^2 + v^3 + p(j^2u + jv) + q \\ &= U + V + 3uv(j^2u + jv) + p(j^2u + jv) + q \\ &= -q + (3uv + p)(j^2u + jv) + q \\ &= 0 \times (j^2u + jv) = 0 \end{aligned}$$

Finalement, $j^2u + jv$ est une solution de (E).

8) Application 1 : on prend $p = -3$ et $q = 1$.

a) Calculer une des valeurs possibles pour chacun des complexes U , V , u et v . Quel que soit le choix réalisé pour chaque complexe, cela conduira au même résultat pour la question suivante.

U et V sont les racines de

$$Z^2 + 1 \times Z - \frac{(-3)^3}{27} = Z^2 + Z + 1$$

Le discriminant est $\Delta = 1 - 4 = -3$. Les racines sont donc

$$Z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } Z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

On remarque que $Z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $Z_2 = \overline{Z_1} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Ainsi, on peut prendre

$$U = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \boxed{j} \quad V = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \boxed{j^2}$$

Comme u est une racine cubique de U , on peut par exemple prendre

$$u = \boxed{e^{\frac{2i\pi}{9}}}$$

Pour cette valeur de u , on a alors

$$v = \frac{-p}{3u} = \frac{1}{u} = \boxed{e^{-\frac{2i\pi}{9}}}$$

b) En déduire les solutions de $z^3 - 3z + 1 = 0$.

Par les questions précédentes, on a donc 3 racines de $z^3 - 3z + 1$:

$$z_1 = u + v = e^{\frac{2i\pi}{9}} + e^{-\frac{2i\pi}{9}} = \boxed{2 \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)}$$

Pour z_2 , on remarque que $v = \bar{u}$ et $j^2 = \bar{j}$, si bien que

$$\begin{aligned} z_2 &= ju + j^2v = ju + \overline{j\bar{u}} = 2\operatorname{Re}(ju) \\ &= 2\operatorname{Re}\left(e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{\frac{2i\pi}{9}}\right) = 2\operatorname{Re}\left(e^{\frac{8i\pi}{9}}\right) \\ &= \boxed{2 \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)} \end{aligned}$$

Pour z_3 , on remarque que $ju = \overline{j^2u}$, si bien que

$$\begin{aligned} z_3 &= j^2u + ju = j^2u + \overline{j^2u} = 2\operatorname{Re}(j^2u) \\ &= 2\operatorname{Re}\left(e^{\frac{4i\pi}{3}} e^{\frac{2i\pi}{9}}\right) = 2\operatorname{Re}\left(e^{\frac{14i\pi}{9}}\right) \\ &= \boxed{2 \cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)} \end{aligned}$$

2) Application 2 : on cherche les solutions de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{C}$

$$(EQ) : \quad x^3 + (6 + 3i)x^2 + (6 + 12i)x - 3 + 8i = 0$$

a) On pose $z = x + a$ avec $a \in \mathbb{C}$. Trouver a tel que z vérifie une équation de la forme $z^3 + pz + q = 0$. Déterminer p et q .

Avec $x = z - a$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 + (6 + 3i)x^2 + (6 + 12i)x - 3 + 8i \\ &= (z - a)^3 + (6 + 3i)(z - a)^2 + (6 + 12i)(z - a) - 3 + 8i \\ &= z^3 - 3az^2 + 3a^2z - a^3 + (6 + 3i)(z^2 - 2az + a^2) \\ &\quad + (6 + 12i)(z - a) - 3 + 8i \\ &= z^3 + (-3a + 6 + 3i)z^2 + (3a^2 - 12a - 6ai + 6 + 12i)z \\ &\quad - a^3 + (6 + 3i)a^2 - a(6 + 12i) - 3 + 8i \end{aligned}$$

Le coefficient en z^2 s'annule si et seulement si

$$-3a + 6 + 3i = 0 \iff -a + 2 + i = 0 \iff \boxed{a = 2 + i}$$

Pour cette valeur de a , on a donc

$$z^3 + pz + q = 0$$

avec

$$\begin{aligned} p &= 3a^2 - 12a - 6ai + 6 + 12i \\ &= 3[(2 + i)^2 - 4(2 + i) - 2(2 + i)i + 2 + 4i] \\ &= 3[4 + 4i - 1 - 8 - 4i - 4i - 2i^2 + 2 + 4i] \\ &= 3[4 - 1 - 8 + 4] \\ &= \boxed{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= -a^3 + (6 + 3i)a^2 - a(6 + 12i) - 3 + 8i \\ &= -(2 + i)^3 + 3(2 + i)(2 + i)^2 - 6(2 + i)(1 + 2i) - 3 + 8i \\ &= 2(2 + i)^3 - 6(2 + 4i + i - 2) - 3 + 8i \\ &= 2(8 + 3 \times 4i + 3 \times 2i^2 + i^3) - 6 \times 5i - 3 + 8i \\ &= 2(2 + 12i - i) - 3 - 22i \\ &= 4 + 22i - 3 - 22i \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

b) Résoudre (EQ) .

On cherche les racines de $z^3 + pz + q$ avec $p = 3$ et $q = 1$. On cherche donc les racines du polynôme $z^3 - 3z + 1 = 0$. Or, par la question 8.b), ces racines sont :

$$z_1 = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \quad z_2 = 2 \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) \quad z_3 = 2 \cos\left(\frac{14\pi}{9}\right)$$

Or, par la question 9.a), pour tout $x \in \mathbb{C}$, x est solution de (EQ) si et seulement si $x + a$ est racine de $z^3 - 3z + 1 = 0$. Ainsi, les solutions de (EQ) sont

$$\mathcal{S} = \left\{ 2 \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) - a, \quad 2 \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) - a, \quad 2 \cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) - a \right\}$$

Exercice 3 — Sommes trigonométriques

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$S_n(a, b) = \sum_{k=0}^n \cos(ak + b) \quad \text{et} \quad T_n(a, b) = \sum_{k=0}^n \sin(ak + b)$$

Partie I — Une formule fondamentale et ses conséquences

1) Calculer $S_n(a, b)$ et $T_n(a, b)$ lorsque $a \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Comme $a \in 2\pi\mathbb{Z}$, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k'\pi$ (la lettre k sera déjà prise dans la somme!). Donc :

$$\begin{aligned} S_n(a, b) &= \sum_{k=0}^n \cos(2k'\pi k + b) \\ &= \sum_{k=0}^n \cos(b) \quad (\text{car } \cos \text{ est } 2\pi\text{-périodique}) \\ &= \boxed{(n+1) \cos(b)} \end{aligned}$$

De même

$$T_n(a, b) = \boxed{(n+1) \sin(b)}$$

2) On suppose dans cette question que $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

a) Calculer $S_n(a, b) + iT_n(a, b)$, puis établir que

$$\begin{aligned} S_n(a, b) &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \cos\left(\frac{na}{2} + b\right) \\ T_n(a, b) &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \sin\left(\frac{na}{2} + b\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n(a, b) + iT_n(a, b) &= \sum_{k=0}^n [\cos(ak + b) + i \sin(ak + b)] \\ &= \sum_{k=0}^n e^{i(ak+b)} \\ &= \sum_{k=0}^n e^{iak} e^{ib} \\ &= e^{ib} \sum_{k=0}^n (e^{ia})^k \end{aligned}$$

Comme $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{ia} \neq 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_n(a, b) + iT_n(a, b) &= e^{ib} \times \frac{1 - (e^{ia})^{n+1}}{1 - e^{ia}} \\ &= e^{ib} \times \frac{1 - e^{i(n+1)a}}{1 - e^{ia}} \\ &= e^{ib} \times \frac{e^{i\frac{(n+1)a}{2}} (e^{-i\frac{(n+1)a}{2}} - e^{i\frac{(n+1)a}{2}})}{e^{i\frac{a}{2}} (e^{-i\frac{a}{2}} - e^{i\frac{a}{2}})} \\ &= e^{ib} \times e^{i\frac{na}{2}} \times \frac{-2i \sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{a}{2}\right)} \\ &= e^{i\left(\frac{na}{2} + b\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} S_n(a, b) &= \operatorname{Re}(S_n(a, b) + iT_n(a, b)) \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{i\left(\frac{na}{2} + b\right)} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \times \operatorname{Re}\left(e^{i\left(\frac{na}{2} + b\right)}\right) \\ &= \boxed{\frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \times \cos\left(\frac{na}{2} + b\right)} \end{aligned}$$

On trouve de même

$$\begin{aligned} T_n(a, b) &= \operatorname{Im}(S_n(a, b) + iT_n(a, b)) \\ &= \boxed{\frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \times \sin\left(\frac{na}{2} + b\right)} \end{aligned}$$

b) Retrouver la formule de $S_n(a, b)$ sans utiliser les nombres complexes, en transformant l'expression $2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos(ak + b)$ par une formule trigonométrique.

On a :

$$\begin{aligned}
& 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) S_n(a, b) \\
&= \sum_{k=0}^n 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos(ak + b) \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\sin\left(\frac{a}{2} + ak + b\right) + \sin\left(\frac{a}{2} - (ak + b)\right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \sin\left(ak + \frac{a}{2} + b\right) + \sum_{k=0}^n \sin\left(-ak + \frac{a}{2} - b\right) \\
&= T_n\left(a, \frac{a}{2} + b\right) + T_n\left(-a, \frac{a}{2} - b\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \times \sin\left(\frac{na}{2} + \frac{a}{2} + b\right) \\
&\quad + \frac{\sin\left(-\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{a}{2}\right)} \times \sin\left(-\frac{na}{2} + \frac{a}{2} - b\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \times \sin\left(\frac{(n+1)a}{2} + b\right) \\
&\quad + \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \times \sin\left(\frac{(-n+1)a}{2} - b\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \times \left[\sin\left(\frac{(n+1)a}{2} + b\right) + \sin\left(\frac{(-n+1)a}{2} - b\right) \right]
\end{aligned}$$

Or, pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

D'où avec $p = \frac{(n+1)a}{2} + b$ et $q = \frac{(-n+1)a}{2} - b$, on a :

$$\frac{p+q}{2} = \frac{a}{2} \quad \frac{p-q}{2} = \frac{na}{2} + b$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\frac{(n+1)a}{2} + b\right) + \sin\left(\frac{(-n+1)a}{2} - b\right) \\
&= 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{na}{2} + b\right)
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}
& 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) S_n(a, b) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \times 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{na}{2} + b\right)
\end{aligned}$$

de sorte qu'en divisant par $2 \sin\left(\frac{a}{2}\right)$, qui est non nul (car $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$), on trouve le résultat voulu.

Autre méthode : on peut simplifier le calcul ainsi :

$$\begin{aligned}
& 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) S_n(a, b) \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\sin\left(\frac{a}{2} + ak + b\right) + \sin\left(\frac{a}{2} - (ak + b)\right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\sin\left(ka + \frac{a}{2} + b\right) - \sin\left(ka - \frac{a}{2} + b\right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\sin\left((k+1)a - \frac{a}{2} + b\right) - \sin\left(ka - \frac{a}{2} + b\right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) \quad \text{avec } u_k = \sin\left(ka - \frac{a}{2} + b\right) \\
&= u_{n+1} - u_0 \quad \text{par télescopage} \\
&= \sin\left((n+1)a - \frac{a}{2} + b\right) - \sin\left(-\frac{a}{2} + b\right) \\
&= \sin p + \sin q \quad \text{avec } \begin{cases} p = \left(n + \frac{1}{2}\right)a + b \\ q = \frac{a}{2} - b \end{cases} \\
&= 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
&= 2 \sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right) \cos\left(\frac{na}{2} + b\right)
\end{aligned}$$

et on conclut de la même façon.

3) Soit $n \geq 2$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) Linéariser $\cos^3 \theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 \\
&= \frac{1}{8} (e^{i3\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-i3\theta}) \\
&= \frac{1}{8} (2\cos(3\theta) + 3 \times 2\cos(\theta)) \\
&= \boxed{\frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos\theta}
\end{aligned}$$

b) En déduire la valeur de la somme $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^3\left(b + \frac{2k\pi}{n}\right)$.

On discutera selon la valeur de n .

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \cos^3\left(b + \frac{2k\pi}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{4} \cos\left(3b + \frac{6k\pi}{n}\right) + \frac{3}{4} \cos\left(b + \frac{2k\pi}{n}\right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{6\pi}{n}k + 3b\right) + \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi}{n}k + b\right) \\
&= \frac{1}{4} S_{n-1}\left(\frac{6\pi}{n}, 3b\right) + \frac{3}{4} S_{n-1}\left(\frac{2\pi}{n}, b\right)
\end{aligned}$$

On disjoint les cas :

- Si $n \neq 3$, alors $\frac{6\pi}{n} \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et par ailleurs comme $n \geq 2$ on a $\frac{2\pi}{n} \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Ainsi, par la question **a)**

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n \times \frac{6\pi}{n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{6\pi}{2n}\right)} \cos\left(\frac{(n-1)\frac{6\pi}{n}}{2} + 3b\right) \\
&\quad + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n \times \frac{2\pi}{n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)} \cos\left(\frac{(n-1)\frac{2\pi}{n}}{2} + b\right)
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{n \times \frac{6\pi}{n}}{2}\right) &= \sin(3\pi) = 0 \\
\sin\left(\frac{n \times \frac{2\pi}{n}}{2}\right) &= \sin\pi = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas,

$$C_n = \boxed{0}$$

- Si $n = 3$, alors $\frac{6\pi}{n} = 2\pi \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $\frac{2\pi}{n} \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Par la question **a)**,

$$\begin{aligned}
C_n &= n \cos(b) + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n \times \frac{2\pi}{n}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)} \cos\left(\frac{(n-1)\frac{2\pi}{n}}{2} + b\right) \\
&= 3 \cos(b) + 0 \quad \text{car } \sin(\pi) = 0 \\
&= \boxed{3 \cos(b)}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$C_n = \begin{cases} 3 \cos(b) & \text{si } n = 3 \\ 0 & \text{si } n \neq 3 \end{cases}$$

Partie II — Noyaux de Dirichlet et de Fejér

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et x un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$D_k(x) = \sum_{j=-k}^k e^{ijx} \quad \text{et} \quad F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$$

4) Montrer que $D_k(x)$ est réel et que

$$D_k(x) = 1 + 2 \sum_{j=1}^k \cos(jx) = \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On a

$$\begin{aligned}
D_k(x) &= e^{i(-k)x} + e^{i(-k+1)x} + \dots + e^{-ix} \\
&\quad + 1 + e^{ix} + \dots + e^{ikx} \\
&= 1 + (e^{ix} + e^{-ix}) + \dots + (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\
&= 1 + 2 \cos(x) + \dots + 2 \cos(kx) \\
&= \boxed{1 + 2 \sum_{j=1}^k \cos(jx)}
\end{aligned}$$

En particulier, $D_k(x)$ est un réel puisque tous les termes de cette somme sont réels. Enfin, par la question **a)**, comme $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on

a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^k \cos(jx) &= S_k(x, 0) - 1 \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(k+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos\left(\frac{kx}{2}\right) - 1\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}D_k(x) &= 1 + 2 \left(\frac{\sin\left(\frac{(k+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \cos\left(\frac{kx}{2}\right) - 1 \right) \\ &= -1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times 2 \sin\left(\frac{(k+1)x}{2}\right) \cos\left(\frac{kx}{2}\right)\end{aligned}$$

Or, on sait que pour tous réels p, q :

$$2 \sin(p) \cos(q) = \sin(p+q) + \sin(p-q)$$

donc

$$2 \sin\left(\frac{(k+1)x}{2}\right) \cos\left(\frac{kx}{2}\right) = \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}D_k(x) &= -1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \times \left(\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right) \\ &= \boxed{\frac{\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}\end{aligned}$$

5) En utilisant un résultat de la partie I, montrer que

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2$$

Par la question précédente,

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{n \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n \sin\left(\frac{x}{2}\right)} T_{n-1}\left(x, \frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

Or, comme $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, par la question 1.a) :

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \frac{1}{n \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left(\frac{(n-1)x}{2} + \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{n} \left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2}\end{aligned}$$

6) Montrer que

$$\sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \cos(jx) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - n \right)$$

On remarque que, par la question précédente, on a

$$nF_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

et donc $\frac{1}{2}(nF_n(x) - n)$ est le second membre de la relation voulue.

Or,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} (nF_n(x) - n) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) - n \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^k \cos(jx) \right) - n \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^k \cos(jx) - n \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^k \cos(jx) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} \cos(jx) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \cos(jx) \sum_{k=j}^{n-1} 1 \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} \cos(jx) (n - 1 - j + 1) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} (n - j) \cos(jx)
\end{aligned}$$

On a donc démontré le résultat voulu.

7) En déduire une expression de $\sum_{j=1}^{n-1} j \cos(jx)$.

On remarque que

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n-1} (n - j) \cos(jx) \\
&= n \sum_{j=1}^{n-1} \cos(jx) - \sum_{j=1}^{n-1} j \cos(jx)
\end{aligned}$$

D'où par la question précédente :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n-1} j \cos(jx) \\
&= n \sum_{j=1}^{n-1} \cos(jx) - \sum_{j=1}^{n-1} (n - j) \cos(jx) \\
&= \frac{n}{2} (D_{n-1}(x) - 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - n \right) \\
&= \frac{n}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - n \right) \\
&= \frac{n}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \boxed{\frac{n \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}
\end{aligned}$$

8) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \cos(jy) \geq -\frac{1}{2}$$

On a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n} \right) \cos(jy) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n - j) \cos(jy)
\end{aligned}$$

On disjoint les cas.

- Si $y \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on peut utiliser la question 6) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \cos(jy) \\
& \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - n \right) \\
& \geq \frac{1}{2n} \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2} \\
& \geq -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

car $\frac{1}{2n} \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \geq 0$.

- Si $y \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \cos(jy) = \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \geq 0$$

Dans tous les cas, on a bien le résultat voulu.